Εξετάσεις Φεβρουαρίου 2022 - Απειροστικός Λογισμός 2

Διδάσκοντες Ε. Νικολιδάκης και Χ. Σαρόγλου

Θέμα 1

(i) (1 μον.) Έστω ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ πραγματικών αριθμών. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, δείξτε ότι $\lim_n a_n = 0$. Το αντίστροφο ισχύει;

(ii) (1 μον.) Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$.

(iii) (1 μον.) Να βρεθούν τα σημεία $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{n^2}$ συγκλίνει.

Θέμα 2

(i) (1,5 μον.) Έστω $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο ομοιόμορφα συνεχείς και φραγμένες συναρτήσεις. Να δειχθεί ότι το η σύνθεση τους $g \circ f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.

(ii) (1,5 μον.) Να δειχθεί ότι οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi},\ x \in (0,\pi) \quad \text{και} \quad g(x) = \sqrt{x},\ x \in (0,+\infty)$$

είναι ομοιόμορφα συνεχείς

Θέμα 3

(i) (1 μον.) Δίνεται η συνάρτηση $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2$ και η διαμέριση του $[0,1]$, $P = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$. Υπολογίστε το άνω άθροισμα $U(f,P)$ της f ως προς τη διαμέριση P.

(ii) (1 μον.) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} \pi & , \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ -e & , \quad x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1] \end{cases}$$

είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

Θέμα 4

(i) (2 μον.) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{1}{(x+2)(x-3)^2}dx \quad \text{και} \quad \int_1^2 x^3 e^x dx.$$

(ii) (1 μον.) Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}+1}{x^4+5}dx$.